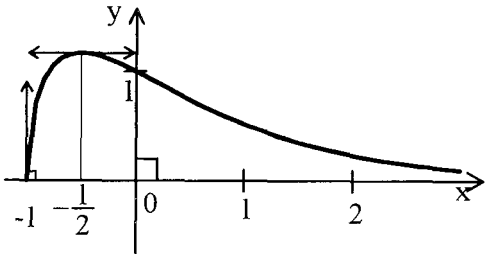

6)a- la fonction $u : x \mapsto u(x) = 1 + x - e^x$ est définie et dérivable sur IR et $\forall x \in IR; u'(x) = 1 - e^x$
d'où les variations de u

x	$-\infty$		0		$+\infty$
u'(x)		+	0	-	
u(x)		↗	0	↘	

$\Rightarrow \forall x \in IR; u(x) \leq 0$ (car 0 est le maximum absolu de u)
$\Leftrightarrow \forall x \in IR; 1 + x \leq e^x$.

b- $\forall x \in IR;\quad 1+x \leq e^x \Leftrightarrow \sqrt{1+x} \leq \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}}$
$\Leftrightarrow \sqrt{1+x}\, e^{-x} \leq e^{\frac{x}{2}} e^{-x} \Leftrightarrow \underline{f_1(x) \leq e^{\frac{-x}{2}}}$

7) Soit λ un réel supérieur ou égal à 1 et $S(\lambda) = \int_1^\lambda f_1(x)dx$.

a- $\lambda \geq 1$ et $S(\lambda) = \int_1^\lambda f_1(x)dx = \int_1^\lambda |f_1(x) - 0|dx$ **car** $f_1(x)\sqrt{1+x}\, e^{-x} \geq 0$
$\Rightarrow S(\lambda)$ est l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=1 et $x=\lambda$.

b- Pour tout $\lambda \geq 1$, $0 \leq f_1(x) \leq e^{\frac{-x}{2}} \Rightarrow 0 \leq \int_1^\lambda f_1(x)dx \leq \int_1^\lambda e^{\frac{-x}{2}} dx$
$\Leftrightarrow 0 \leq S(\lambda) \leq \left[-2e^{\frac{-x}{2}}\right]_1^\lambda = 2e^{\frac{-1}{2}} - 2e^{\frac{-\lambda}{2}}$

Or $-2e^{\frac{-\lambda}{2}} \leq 0 \Leftrightarrow 2e^{\frac{-1}{2}} - 2e^{\frac{-\lambda}{2}} \leq 2e^{\frac{-1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$ d'où $\underline{0 \leq S(\lambda) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}}$

B-1) $\otimes M(x,y) \in C_1 \cap C_2 \Leftrightarrow y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ et $x \in [-1,+\infty[$
$\Leftrightarrow x \in [-1,+\infty[$ et $y = f_1(x)$ et $f_1(x) = f_2(x)$.

· $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow \sqrt{1+x}\, e^{-x} - \sqrt{1+x}\, e^{-\frac{x}{2}} = 0$
$\Leftrightarrow \sqrt{1+x}\, e^{-x}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\right) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $1 - e^{\frac{x}{2}} = 0$
$\Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 0$

Ainsi $C_1 \cap C_2 = \{A(-1;0); B(0;1)\}$

$\boxplus \forall n \in IN^*;$